$\boxed{1}$

球面 S を xz 平面で切断した図形の方程式は，

$x^2+(z-1)^2=1$　・・・①

一方，直線 AB の方程式は，

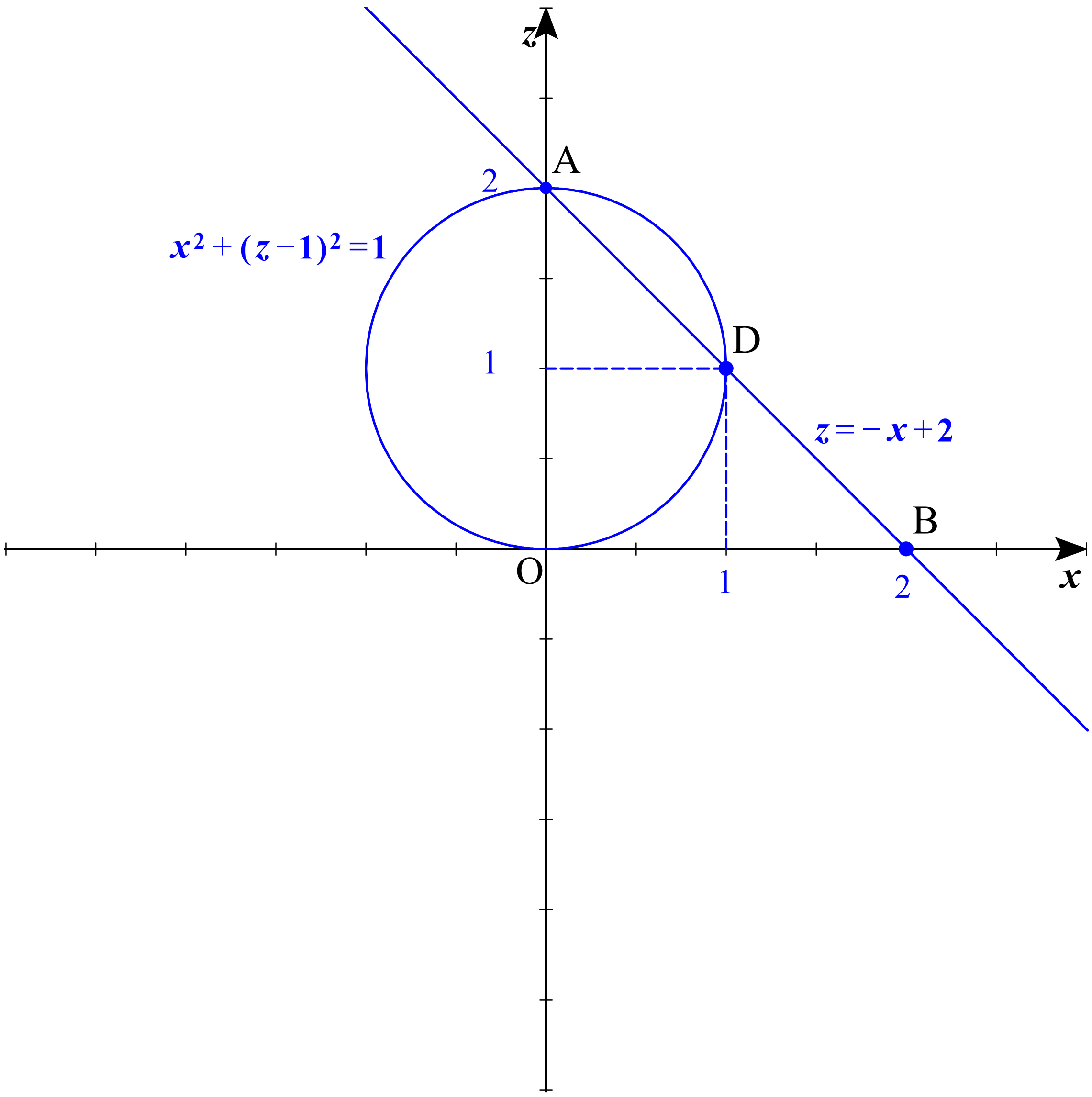
$z=-x+2$　・・・②

点 D は，①と②の交点のうち A でない方だから，

①の z に②を代入して，x が 0 でない解を求めると，

$x^2+\{(-x+2)-1\}^2=1$　$\therefore x(x-1)=0$　$\therefore x=1$

よって，$\mathrm{D}(1,0,1)$



球面 S を yz 平面で切断した図形の方程式は，$y^2+(z-1)^2=1$　・・・③

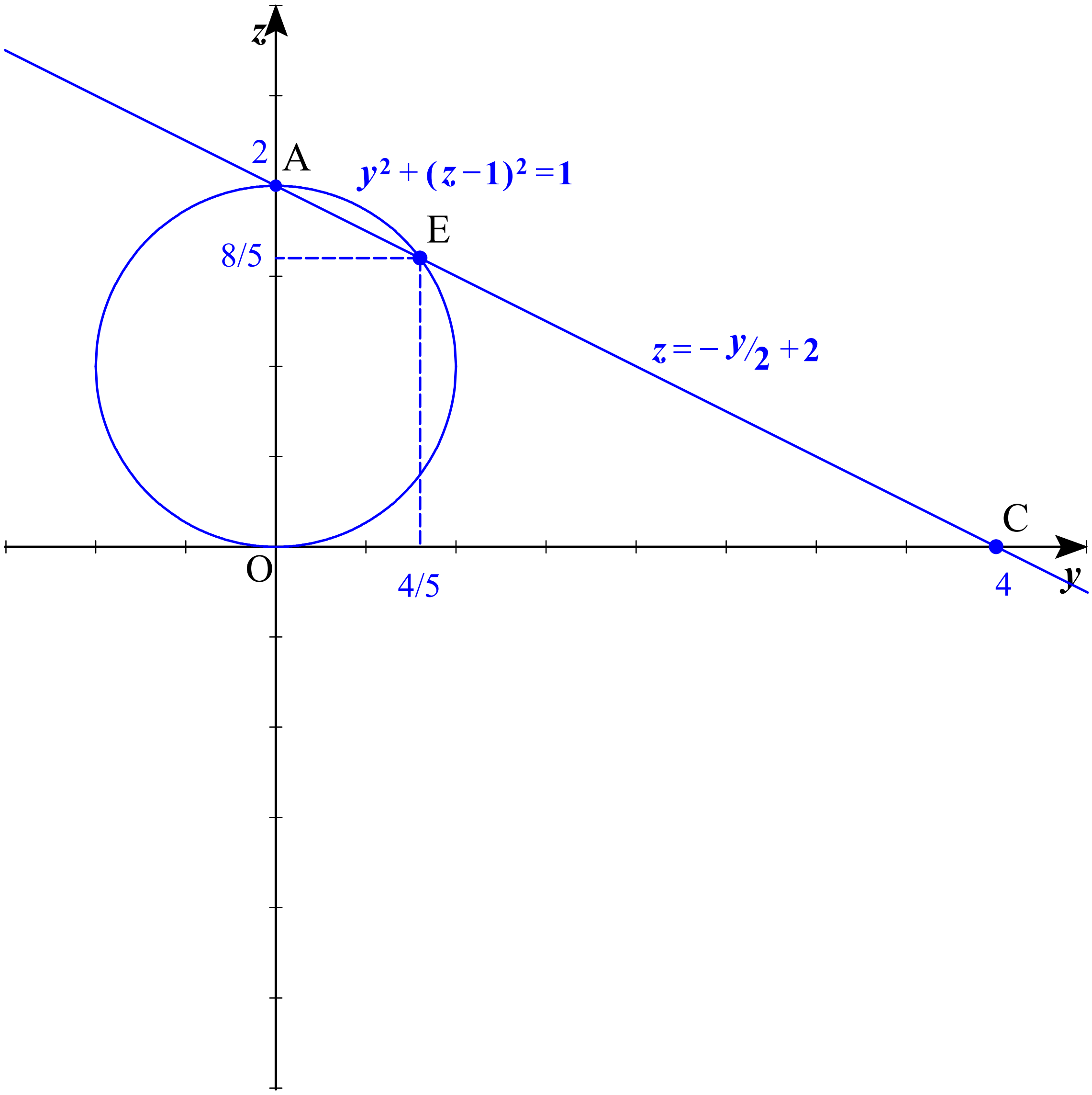
一方，直線 AC の方程式は，$z=-\dfrac{1}{2}y+2$　・・・④

点 E は，③と④の交点のうち A でない方だから，

③の z に④を代入して，y が 0 でない解を求めると，

$y^2+\left\{\left(-\dfrac{1}{2}y+2\right)-1\right\}^2=1$　$\therefore y(5y-4)=0$　$\therefore y=\dfrac{4}{5}$

よって，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$



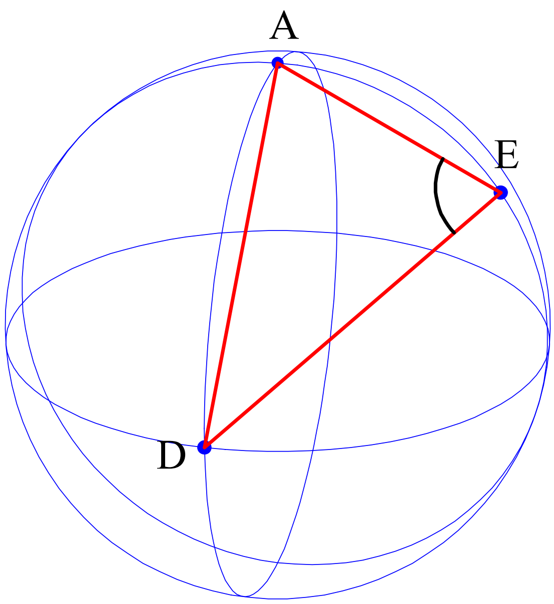
$\mathrm{A}(0,0,2)$，$\mathrm{D}(1,0,1)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\left(0,\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\left(1,\ -\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$

$$\therefore \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{EA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|}=\frac{0+\dfrac{16}{25}-\dfrac{6}{25}}{\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\angle\mathrm{AED}$ は三角形 AED の内角だから，$0<\alpha<\pi \quad \therefore \sin\alpha>0$

よって，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$



$\boxed{2}$

円 C_1 の中心を点 A とすると，$A\left(2\cos\dfrac{\theta+\pi}{2}, 2\sin\dfrac{\theta+\pi}{2}\right)=\left(-2\sin\dfrac{\theta}{2}, 2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

よって，円 C_1 の方程式は，$\left(x+2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2+\left(y-2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=4$

円 C_1 と x 軸，すなわち $y=0$ との交点は，

$\left(x+2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2+\left(0-2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=4$ より，$x\left(x+4\sin\dfrac{\theta}{2}\right)=0$

よって，$(0,0)$，$\left(-4\sin\dfrac{\theta}{2}, 0\right)$

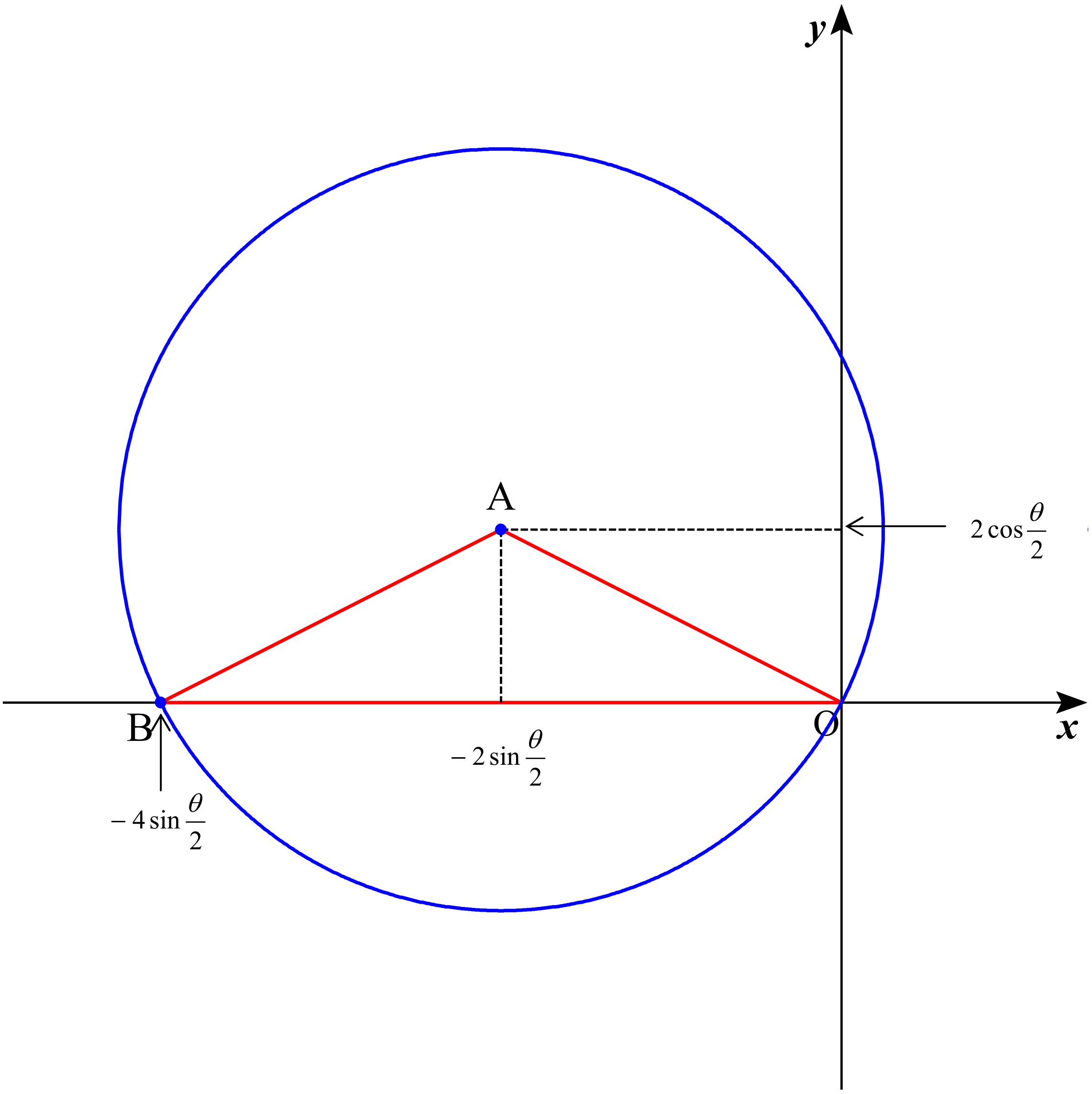
ここで，$(0,0)$ を点 O，$\left(-4\sin\dfrac{\theta}{2}, 0\right)$ を点 B とすると，

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\\ 2\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-4\sin\dfrac{\theta}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ より，三角形 AOB の面積，すなわち S_1 は，

$$
\begin{aligned}
S_1&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 16\sin^2\frac{\theta}{2}-64\sin^4\frac{\theta}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(8\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{16\sin\theta}\\
&=2\left|\sin\theta\right|
\end{aligned}
$$

これと $0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$

よって，$S_1=2\sin\theta$　・・・①


y
A
$2\cos\frac{\theta}{2}$
B
O
x
$-2\sin\frac{\theta}{2}$
$-4\sin\frac{\theta}{2}$

円 C_2 の中心を点 D とすると，$D(\cos\theta, \sin\theta)$

よって，円 C_2 の方程式は，$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$

円 C_2 と x 軸，すなわち $y=0$ との交点は，

$(x-\cos\theta)^2+(0-\sin\theta)^2=1$ より，$x(x-2\cos\theta)=0$

よって，$(0,0)$，$(2\cos\theta, 0)$

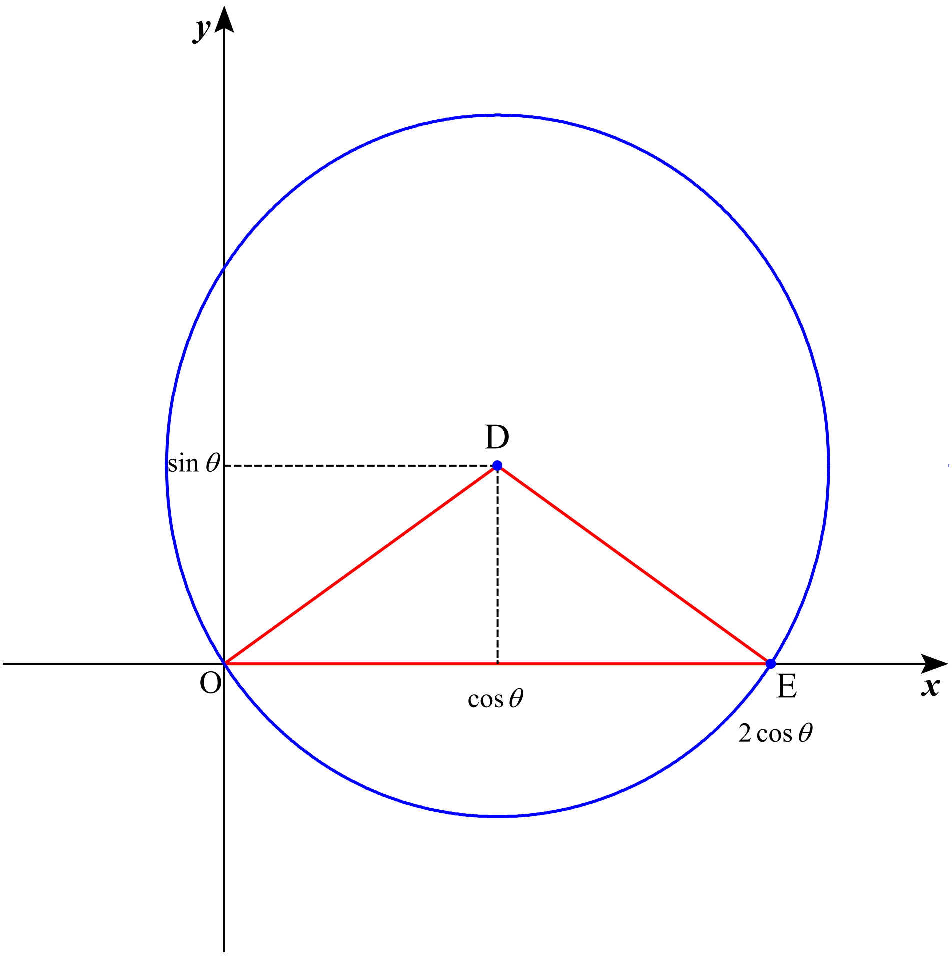
ここで，$(2\cos\theta, 0)$ を点 E とすると，

$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$ より，三角形 DOE の面積，すなわち S_2 は，

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OD}\right|^2\left|\overrightarrow{OE}\right|^2-\left(\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 4\cos^2\theta-4\cos^4\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2\theta\sin^2\theta} \\
&= \left|\sin\theta\cos\theta\right|
\end{aligned}
$$

これと $0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$

よって，$S_2=\sin\theta\left|\cos\theta\right|$　・・・②



①と②および $0<\theta<\pi$ より，S_1+S_2 は下表のようになる。

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
S_1		$2\sin\theta$	2	$2\sin\theta$	
S_2		$\sin\theta\cos\theta$	0	$-\sin\theta\cos\theta$	
S_1+S_2		$2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$	2	$2\sin\theta-\sin\theta\cos\theta$	

$S_1+S_2=f(\theta)$ とおくと，

（ｉ）$0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき

$f(\theta)=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

$f'(\theta)=2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\quad=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1$

$\theta=\alpha$ のとき $f'(\theta)=0$ とすると，$2\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$（$\cos\alpha>0$）より，$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

よって，

$0\leq\cos\theta<\cos\alpha$，すなわち $\alpha<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき $f'(\theta)<0$

$\cos\alpha<\cos\theta$，すなわち $0<\theta<\alpha$ のとき $f'(\theta)>0$

したがって，$f(\theta)$ の増減は次のようになる。

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
$f(\theta)$		↑	極大	↓	2

よって，$\theta=\alpha$ のとき，$f(\theta)$ は極大値 $f(\alpha)$ をとり，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)&=2\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\\
&=\sin\alpha(2+\cos\alpha)\\
&=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\left(2+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=\sqrt{1-\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}{4}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{3\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}
\end{aligned}
$$

（ｉ） $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$$f(\theta)=2\sin\theta-\sin\theta\cos\theta$$

$$f'(\theta)=2\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta$$
$$=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+1$$

$\theta=\beta$ のとき $f'(\theta)=0$ とすると，$-2\cos^2\beta+2\cos\beta+1=0$（$\cos\beta<0$）より，$\cos\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

よって，

$\cos\beta<\cos\theta<0$，すなわち $\frac{\pi}{2}<\theta<\beta$ のとき $f'(\theta)>0$

$\cos\theta<\cos\beta$，すなわち $\beta<\theta<\pi$ のとき $f'(\theta)<0$

（横軸 $\cos\theta$，縦軸を $f(\theta)$ とするグラフを描けばすぐわかる）

したがって，$f(\theta)$ の増減は次のようになる。

θ	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
$f(\theta)$		↑	極大	↓	2

よって，$\theta=\beta$ のとき，$f(\theta)$ は極大値 $f(\beta)$ をとり，

$$f(\beta)=2\sin\beta-\sin\beta\cos\beta$$
$$=\sin\beta(2-\cos\beta)$$
$$=\sqrt{1-\cos^2\beta}\left(2-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{1-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}$$

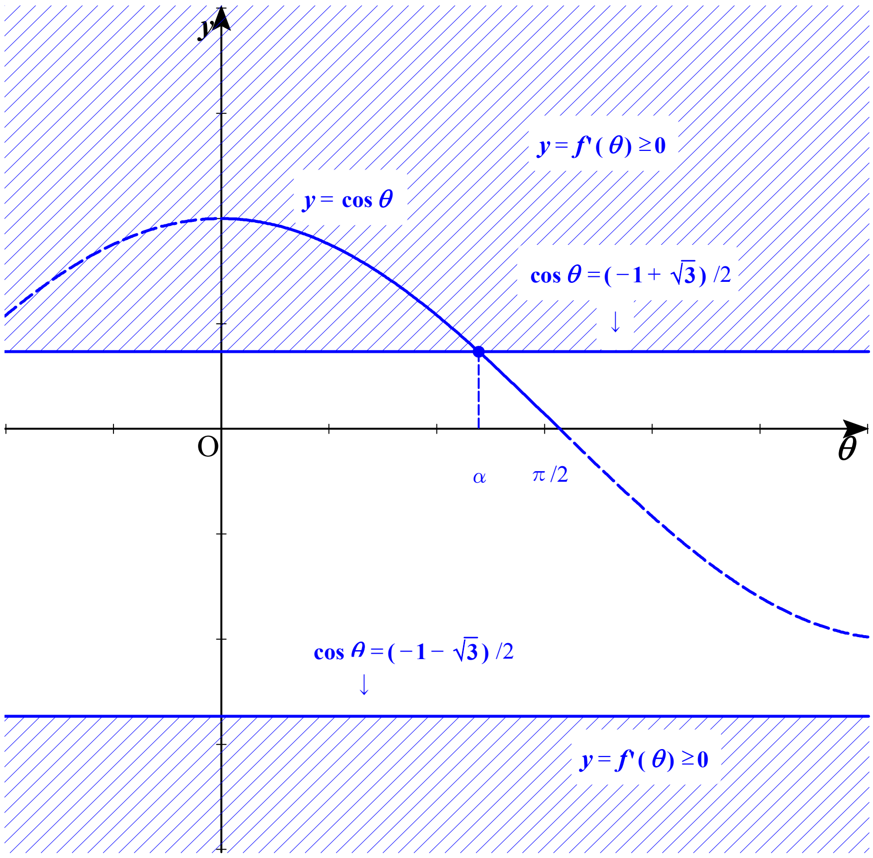
（ｉ），（ⅱ）より，

S_1+S_2 の最大値は，$\frac{3\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}$　・・・(答)

このときの $\cos\theta$ の値は，$\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}$　・・・(答)

補足

グラフを描くと，$\cos\theta > \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ すなわち，$f'(\theta) > 0$ のとき $0 < \theta < \alpha$ がよくわかる。



$\boxed{3}$

(1)

$f(x)=1+(n-1)x+\dfrac{3(n-1)(n-2)}{4}x^2-(1+x)^{n-1}$ とおくと，

$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ のとき，$f(x)>0$ であることを示せばよい。

$$f'(x)=n-1+\frac{3(n-1)(n-2)}{2}x-(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{3(n-1)(n-2)}{2}-(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}\\&=(n-1)(n-2)\left\{\frac{3}{2}-(1+x)^{n-3}\right\}\end{aligned}$$

$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ より，

$$0<(1+x)^{n-3}<\left\{1+\frac{1}{3(n-3)}\right\}^{n-3}=\left[\left\{1+\frac{1}{3(n-3)}\right\}^{3(n-3)}\right]^{\frac{1}{3}}<\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

補足：$\left[\begin{array}{l}3(n-3)=l \text{ とおくと,}\\ \left[\left\{1+\dfrac{1}{3(n-3)}\right\}^{3(n-3)}\right]^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{l}\right)^l\right\}^{\frac{1}{3}}<\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right]$

よって，$-(1+x)^{n-3}>-\dfrac{3}{2}$ より，$f''(x)=(n-1)(n-2)\left\{\dfrac{3}{2}-(1+x)^{n-3}\right\}>(n-1)(n-2)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\right)=0$

したがって，$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ のとき，

$f'(x)$ は単調増加し且つ $f'(0)=n-1-(n-1)\cdot 1^{n-2}=0$　$\therefore f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ のとき単調増加し且つ $f(0)=1-1^{n-1}=0$　$\therefore f(x)>0$

ゆえに，$(1+x)^{n-1}<1+(n-1)x+\dfrac{3(n-1)(n-2)}{4}x^2$

ポイント

x を実数とする不等式だから，帰納法による証明はできない。

複雑な不等式だから，平均値の定理や関数の増減（微分）を使って証明するしかない。

まずは，関数の増減（微分）で証明することから試みるのがよい。

(2)

(1)と同様，$g(x)=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{4}x^3-(1+x)^n$ とおいて，

$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ のとき，$g(x)>0$ であることを示せばよい。

$$g'(x)=n+n(n-1)x+\frac{3n(n-1)(n-2)}{4}x^2-n(1+x)^{n-1}$$
$$=n\left\{1+(n-1)x+\frac{3(n-1)(n-2)}{4}x^2-(1+x)^{n-1}\right\}$$

(1)より，$1+(n-1)x+\dfrac{3(n-1)(n-2)}{4}x^2-(1+x)^{n-1}>0$ だから，$g'(x)>0$

よって，$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ のとき，$g(x)$ は単調増加且つ $g(0)=1-1^n=0$　$\therefore g(x)>0$

ゆえに，$(1+x)^n<1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{4}x^3$

(3)

$n=35$，$x=0.01$ のとき，$0<0.01=\dfrac{1}{100}<\dfrac{1}{3(35-3)}=\dfrac{1}{96}$ より，$0<x<\dfrac{1}{3(n-3)}$ が成り立つ。

よって，(2)の不等式に $n=35$，$x=0.01$ を代入すると，

$$1.01^{35}=(1+0.01)^{35}<1+35\times 0.01+\frac{35\times 34}{2}\times(0.01)^2+\frac{35\times 34\times 33}{4}\times(0.01)^3$$

$\therefore 1.01^{35}<1.4193175$　・・・①

また，二項定理より，

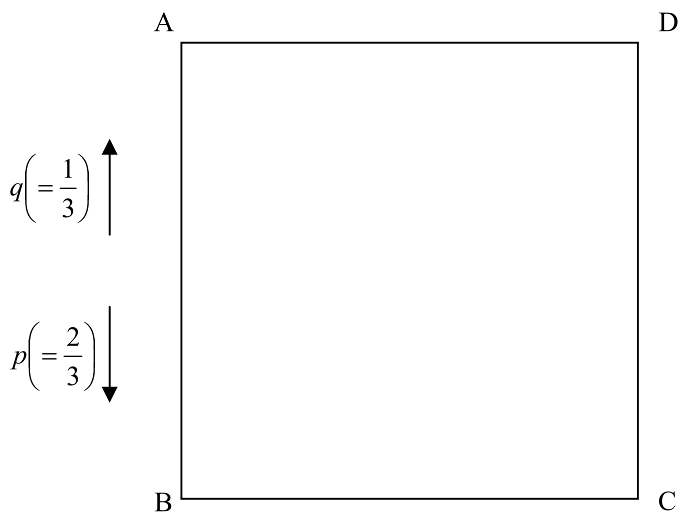
$1.01^{35}=(1+0.01)^{35}>{}_{35}\mathrm{C}_0 1^{35}+{}_{35}\mathrm{C}_1 1^{34}(0.01)^1+{}_{35}\mathrm{C}_2 1^{33}(0.01)^2+{}_{35}\mathrm{C}_3 1^{32}(0.01)^3$

$\therefore 1.01^{35}>1.416045$　・・・②

①と②より，$1.416045<1.01^{35}<1.4193175$

よって，1.41　・・・(答)

$\boxed{4}$

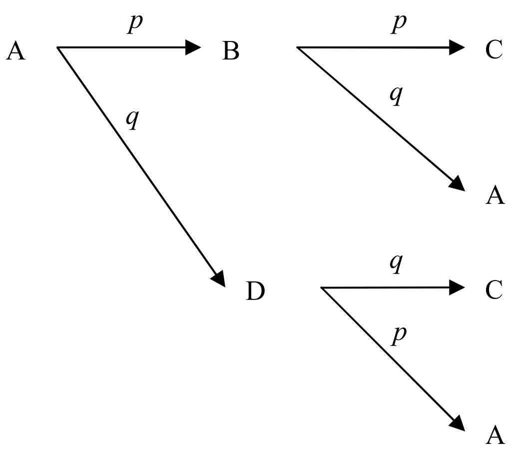


正の向きの確率を p，負の向きの確率を q とおいて処理していく。

(1)

n 秒後に，点 X にある確率を $P_n(\mathrm{X})$ とする。

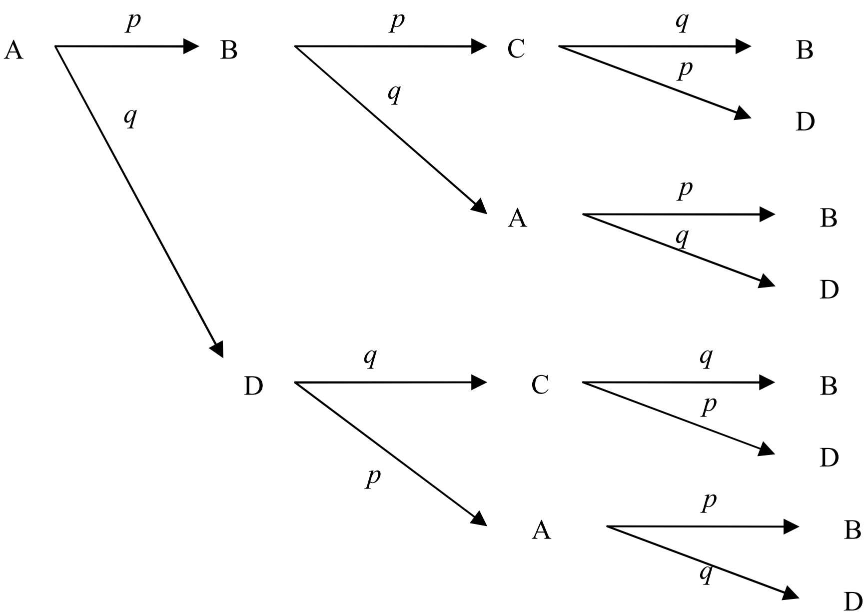
図より，$P_2(\mathrm{A})=2pq=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，$P_2(\mathrm{C})=1-P_2(\mathrm{A})=\frac{5}{9}$



(2)

(1)と同様に，図より

$P_3(\mathrm{B})=3p^2q+q^3=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{13}{27}$，　$P_3(\mathrm{D})=1-P_3(\mathrm{B})=\frac{14}{27}$

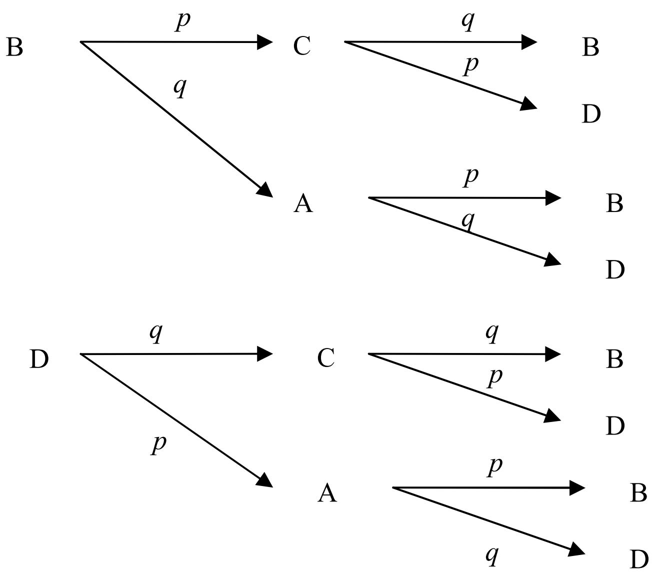


(3)

（ｉ） n が奇数のとき，

$P_n(\mathrm{A})=P_n(\mathrm{C})=0$，　$P_n(\mathrm{D})=1-P_n(\mathrm{B})$

$P_{n-2}(\mathrm{A})=P_{n-2}(\mathrm{C})=0$，　$P_{n-2}(\mathrm{D})=1-P_{n-2}(\mathrm{B})$



図より，

$$
\begin{aligned}
P_n(\mathrm{B}) &= 2pqP_{n-2}(\mathrm{B}) + \left(p^2+q^2\right)P_{n-2}(\mathrm{D}) \\
&= \frac{4}{9}P_{n-2}(\mathrm{B}) + \frac{5}{9}\left(1-P_{n-2}(\mathrm{B})\right) \\
&= -\frac{1}{9}P_{n-2}(\mathrm{B}) + \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

よって， $P_n(\mathrm{B}) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{9}\left(P_{n-2}(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\right)$

$n = 2k-1$ とおくと，

補足：k は 1 から k までの連続する自然数になるから漸化式を処理しやすい

$$
\begin{aligned}
P_{2k-1}(\mathrm{B}) - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{9}\left(P_{2(k-1)-1}(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(P_{2\cdot 1-1}(\mathrm{B}) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$P_{2k-1}(\mathrm{B}) = \frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}$$

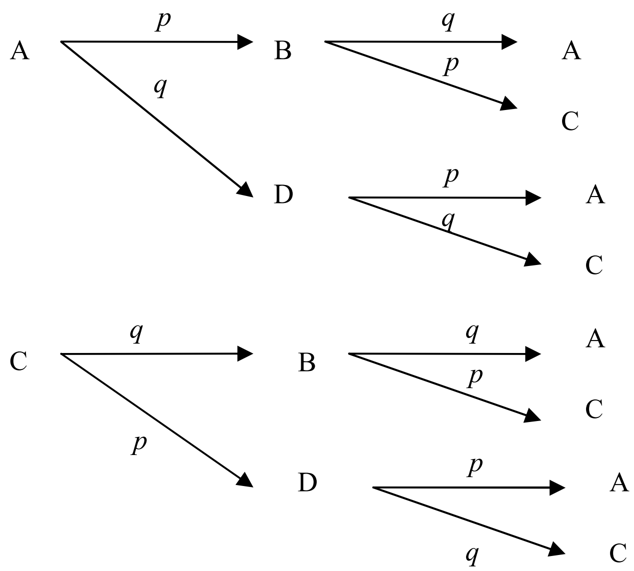
$n = 2k-1$ より， $P_n(\mathrm{B}) = \frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}$

$$P_n(\mathrm{D}) = 1 = P_n(\mathrm{B}) = -\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}$$

（ⅱ） n が偶数のとき，

$P_n(\mathrm{B})=P_n(\mathrm{D})=0$，　$P_n(\mathrm{C})=1-P_n(\mathrm{A})$

$P_{n-2}(\mathrm{B})=P_{n-2}(\mathrm{D})=0$，　$P_{n-2}(\mathrm{C})=1-P_{n-2}(\mathrm{A})$



図より，

$$P_n(\mathrm{A})=2pqP_{n-2}(\mathrm{A})+\left(p^2+q^2\right)P_{n-2}(\mathrm{C})$$
$$=\frac{4}{9}P_{n-2}(\mathrm{A})+\frac{5}{9}\left(1-P_{n-2}(\mathrm{A})\right)$$
$$=-\frac{1}{9}P_{n-2}(\mathrm{A})+\frac{5}{9}$$

よって，$P_n(\mathrm{A})-\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\left(P_{n-2}(\mathrm{A})-\frac{1}{2}\right)$

$n=2k$ とおくと，

$$P_{2k}(\mathrm{A})-\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\left(P_{2(k-1)}(\mathrm{A})-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(P_{2\cdot 1}(\mathrm{A})-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{18}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{k}$$

$$\therefore P_{2k}(\mathrm{A})=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{k}+\frac{1}{2}$$

$n=2k$ より，$P_n(\mathrm{A})=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$$P_n(\mathrm{C})=1=P_n(\mathrm{A})=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}$$

（ｉ）（ⅱ）より，

n が奇数のとき，

$$P_n(\mathrm{A})=P_n(\mathrm{C})=0$$

$$P_n(\mathrm{B})=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$P_n(\mathrm{D})=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{2}$$

n が偶数のとき，

$$P_n(\mathrm{B})=P_n(\mathrm{D})=0$$

$$P_n(\mathrm{A})=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$P_n(\mathrm{C})=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}$$